## 培优课06 利用导数研究函数的零点

### 培优点一 利用导数确定函数零点个数

#### 审题指导

典例1 设函数,，（审题①令,分离参数构造函数审题②利用导数研究的单调性及最值审题③根据最值情况数形结合判断零点个数）.

**解题观摩**

[解析]由题意得，则，

.…………审题①

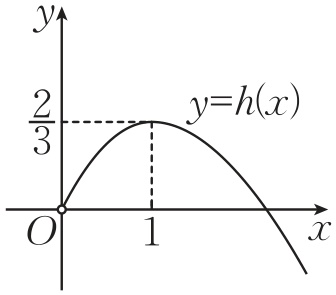
，…………审题① 则，

；…………审题②

.…………审题②

.…………审题②

又，结合的图象，如图，



所以；…………审题③

；…………审题③

；…………审题③

.…………审题③

综上所述，当时，函数无零点；当或时，函数有且只有一个零点；当时，函数有两个零点.

#### 通性通法

**利用导数研究函数零点（方程根）的一般方法**

1.通过导数研究函数的单调性、最大值、最小值、变化趋势等,进而研究函数零点的情况；

2.根据题目要求，画出函数图象的走势规律，标明函数极（最）值的位置；

3.数形结合去分析问题，可以使问题的求解过程有一个清晰、直观的整体展现.

#### 培优训练

##### 由判断零点个数变为证明零点个数设问变式

已知函数.

（1） 讨论函数的单调性.

[解析]根据题意得，，，

当时，，在上单调递增；

当时，令，得，

令，得，

所以在上单调递减，在上单调递增.

故当时，在上单调递增；当时，在上单调递减，在上单调递增.

（2） 设，求证：当时，函数有三个零点.

[解析]当时，,，则，

所以当时，，单调递减；当时，，单调递增.故的最小值为.

又当时， ，当 时， ，

所以.

，设，则，

令，，则，由，得（负值已舍去），

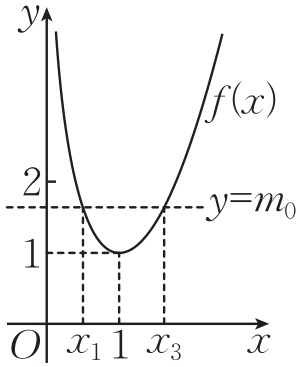
因此当时，，单调递减；

当时，，单调递增.

由于，故，又，

由函数零点存在定理，得存在,，使得，

所以有两个零点和，即方程有两个根和.



作出的图象，如图所示，

当时，因为，

所以方程有一个根；

当时，其中，

因为，

所以由图象可知，有两个不同的根，，且.

综上，当时，函数有三个零点.

### 培优点二 根据函数零点个数求参数的取值范围

#### 审题指导

典例2 已知函数.若（审题①求导后对分类讨论,判断的单调性及最值情况审题②通过函数最值的正、负并结合函数图象判断函数零点个数情况），求实数的取值范围.

**解题观摩**

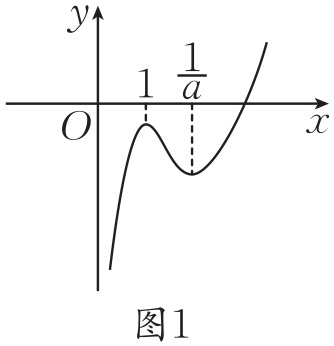
[解析]由题意得，.…………审题①

①当时，恒成立，令，可得，

当时，，当时，，所以在上单调递增，在上单调递减，

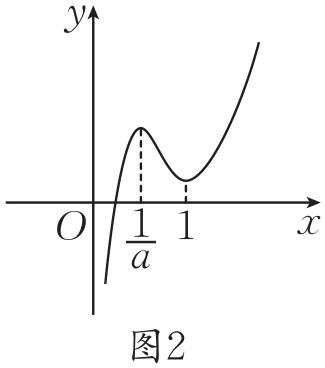
.…………审题①②

②当时，令，可得,.



当时，，可得在,,上单调递增，在,上单调递减，故的极大值为，

；…………审题①②



当时，，可得在,,上单调递增，

在上单调递减，

故的极小值为，

；…………审题①②

当时，，

，…………审题①

且，.…………审题②

综上可知，实数的取值范围为.

#### 通性通法

**利用函数的零点求参数的取值范围的方法**

1.分离参数后，将原问题转化为的值域（最值）问题或直线与的图象的交点个数问题（优选分离、次选分类）求解.

2.利用函数零点存在定理构建不等式求解.

3.转化为两个熟悉的函数图象的位置关系问题，从而构建不等式求解.

#### 培优训练

##### 求参数范围变为求参数的值设问变式

已知函数，其中常数，是自然对数的底数.

（1） 若，求的最小值；

[解析]当时，，则，，记，则，定义域为，

当时，，，可得，单调递减；

当时，，，单调递增.又，所以当时，，，单调递减；当时，,，单调递增.

综上，在上单调递减，在上单调递增，故的最小值为.

（2） 若函数恰有一个零点，求的值.

[解析]已知，定义域为，

当 时， ；当 时， .

因为函数恰有一个零点，且，所以0是函数的唯一零点，可得，不妨设，函数定义域为，则，当时，，又，，

所以在恒成立，则函数在上单调递增，即函数在上单调递增，又，当时，可得，且 时，，所以存在，使得，此时在上，，在上，，故在上为减函数，在上为增函数，

故当时，，而当 时， ，

故在上存在一个零点，则此时函数至少存在两个零点，又因为0是函数的唯一零点，所以不符合题意.

当时，可得，又，

所以在区间上存在一点 ，使得，

故在上，，在上，，

故在上为增函数，在上为减函数，

故当时，，而当 时， ，

故此时函数在上至少存在一个零点，

又因为0是函数的唯一零点，所以不符合题意.

当时，即时，由（1）知，当时，函数取得最小值，最小值，

当时，因为，所以符合题意.

综上，满足条件的值为.